Concours CAE session 2025

Composition : Mathématiques 1

(Algèbre, Analyse, Statistique, Probabilité, Informatique)

Durée : 3 Heures

Consignes pour les candidats	Dans cette épreuve, il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la clarté du raisonnement dans la notation. Les calculatrices graphiques et les smartphones ne sont pas autorisés. Les quatre (4) exercices sont indépendants. Si un élève repère dans l'énoncé ce qui peut lui sembler être une erreur, il le signalera sur sa copie en justifiant les raisons pour lesquelles il a été amené à prendre cette décision.

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) (a) Déterminer $(A-I)^2$.

(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

2) On pose $A = B + I$.

(a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et B, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

(b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3) (a) Déterminer les valeurs propres de A.

(b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

(c) Déterminer une base pour chaque sous-espace propre de A et retrouver le résultat obtenu à la question précédente. Donner les dimensions des sous espaces propres de A.

4) (a) Justifier l'inversibilité de P et déterminer P^{-1}.

(b) Calculer la matrice $T = P^{-1}AP$.

5) On souhaite déterminer l'ensemble :

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

(a) On pose le changement de variable $N = P^{-1}MP$. Établir l'équivalence :

$$AM = MA \Leftrightarrow TN = NT.$$

(b) Montrer l'équivalence :

$$TN = NT \quad \Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

(c) En déduire C_A sous la forme d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par 5 matrices qu'on exprimera à l'aide des matrices P, P^{-1} et $E_{i,j}$ (matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1).

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

(a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variation.

(c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

(d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

(e) Écrire une fonction Python d'en-tête **def u(n)** qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

2) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

(d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

(c) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers γ.

3) (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$. Puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4) Démontrer que la série de terme général a_n converge.

5) (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

(b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

6) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie au début de l'exercice.

(b) Calculer alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2+2xy$.

1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Démontrer que f possède trois points critiques.

3) (a) Écrire la hessienne de f en chaque point critique.

(b) Montrer que f possède un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum. Que peut-on dire concernant le troisième point critique ?

(c) Étudier les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ lorsque x est au voisinage de 0. Conclure.

4) (a) Compléter l'égalité suivante : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)+2=\left(x^2-1\right)^2+\left(y^2-1\right)^2+\dots$

(b) Que peut-on conclure quant au minimum de f ?

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

2) Déterminer $Y(\Omega)$.

3) Soit $k\in\{1,\dots,n\}$.

(a) On suppose l'événement $[X=k]$ réalisé. Déterminer en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

(b) Pour tout entier j de $[1,n]$, exprimer $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=j])$ en fonction de k et j. On distinguera les cas $j\leq k$ ou $j\geq k+1$.

4) (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$$

(b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([Y=j])=\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

5) Justifier que Y admet une espérance et démontrer : $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{n+2}{3}$.

6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7) (a) Démontrer : $\mathbb{E}(XY)=\dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

(b) En déduire : $\mathrm{Cov}(X,Y)=\dfrac{n^2-1}{18}$.