



Consignes pour les candidats	Cette composition de mathématiques contient huit exercices indépendants les uns des autres. Dans toute l'épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et \ln le logarithme népérien.
-------------------------------------	---

EXERCICE 1

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on considère les fonctions réelles $f_{n,p}$ définies par :

$$f_{n,p}(x) = x^n \ln[(1+x^2)^p].$$

1. Etudier les variations de $f_{n,p}$ selon les valeurs de n et p . Tracer le graphe de $f_{1,p}$.
2. On pose $I_{n,p} = \int_0^1 f_{n,p}(x) dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx$
 - Calculer J_1 et J_2 .
 - Calculer J_n .
 - Calculer $I_{n,p}$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,p}$.

EXERCICE 2

Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow R$ définie par : $f(x) = x^{-5}(e^{1/x} - 1)^{-1}$

1. Calculer la limite de f en zéro et en $+\infty$. Montrer que f admet un maximum.
2. Soit $x_0 = \text{Arg max}(f)$, montrer que $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$
3. Soit $g(t) = 5(1 - e^{-t})$. Montrer que l'équation $5x(e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$, où $x > 0$, est équivalente à $g(t) = t$, où t est strictement positif.
4. Montrer qu'il existe une unique solution α de l'équation $g(t) = t$, avec $\alpha \in [4,5]$
5. En déduire que f possède un unique maximum.

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E) \quad y''(x) - 4y(x) = a|x| + b,$$

Où a et b sont des nombres réels avec a non nul.

1. Déterminer l'expression de la solution générale de l'équation (E) dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Déterminer toutes les fonctions continues sur R qui sont solutions dans chacun des deux intervalles précédents.
3. Déterminer les solutions continûment dérivables sur R qui sont solutions dans chacun des deux intervalles.

EXERCICE 4

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver un polynôme P de degré 2 ayant deux racines réelles distinctes tel que $P(A)=0$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où n est un entier naturel strictement supérieur à 2.

3. Pour n entier positif ou nul, calculer A^n et résoudre le système : $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres réels.

Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'une équation de la forme : $t^3 - t^2 + k = 0$. On précisera les conditions sur le nombre réel k pour que a, b et c existent.

EXERCICE 5

Soit $\vec{u} = (1, 2, 3) \in R^3$.

- Déterminer l'équation du plan vectoriel P orthogonal à \vec{u} .
- Ecrire la matrice M de la projection orthogonale sur P dans la base canonique de R^3 .
- Calculer M^n pour n entier naturel non nul.
- Déterminer, dans la base canonique de R^3 , la matrice S de la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par les deux vecteurs suivants : $e_1 = (-2, 1, 0)$ et $e_2 = (-3, 0, 1)$. On calculera cette matrice S de deux façons différentes. Calculer S^2 .

EXERCICE 6

Soient $E = M_{2,2}(R)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall M \in E, f(M) = MA - AM.$$

- Montrer que f est linéaire et non injective.
- Expliciter la matrice de f dans la base canonique de E .
- Déterminer le noyau et l'image de f .
- Déterminer les valeurs propres de la matrice associée à f . On précisera également les sous espaces vectoriels propres associés à ces valeurs propres.

EXERCICE 7

Soit $E = C^2([0, 1])$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques deux fois continûment dérivables sur $I = [0, 1]$. On pose, pour toute f de E :

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \min_{x \in I} |f'(x)| \text{ et } \|f\|_2 = |f(0)| + |f'(0)| + \min_{x \in I} |f''(x)|$$

- Vérifier que l'on définit ainsi deux normes sur E telles que : $\forall f \in E, \|f\|_1 \leq \|f\|_2$
- Ces deux normes sont-elles équivalentes ?
- Soient f et g deux fonctions de E . On définit sur R , les deux fonctions φ_i ($i=1$ ou 2) par : $\varphi_i(t) = \|f + t g\|_i$.

Montrer que φ_i est uniformément continue sur E

- Expliciter φ_1 et φ_2 dans le cas particulier où $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$

EXERCICE 8

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels positifs par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ |x \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
- Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
- Calculer $I = \int_1^e f(x) dx$.
- On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme $u_0 > 0$ et $u_0 \neq 1$. Etudier la convergence de cette suite selon les valeurs du premier terme.