Concours A2GP session 2025

Composition : Mathématiques 3
(Algèbre, Analyse, Statistiques, Probabilité)
Durée : 4 Heures

Consignes pour les candidats	Merci de ne rien marquer sur le sujet. .

EXERCICE I (ANALYSE)

Soit f la fonction numérique définie sur]0; +∞[par : $f(x) = (x+1)\, e^{-1/x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O; I;J) d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. On admet que f est dérivable sur]0;+∞[. Calculer la dérivée de f
3. a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) En déduire que ∀x > 0, f(x) > 0.

4. a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction $u \mapsto e^u$

   b) Démontrer qu'au voisinage de +∞, à l'ordre 2, f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

   c) En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) à (C) au voisinage de +∞.

   d) Préciser la position relative de (C) et (Δ) au voisinage de +∞.

5. Soit g la fonction définie par : $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ et (C_g) la cour représentative de g

   a) Justifier que f réalise une bijection de]0;+∞[vers un intervalle à préciser.

   b) Vérifier que $g(x) = (1+x)\, e^{-x}$, ∀ x ∈ $\mathbb{R}$.

   c) En déduire de la question 5.b le développement limité de g au voisinage de 0 à l'ordre 3.

EXERCICE II (ANALYSE)

On veut étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

1) Soit $[a;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a;b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que f admet une limite infinie ou n'admet pas de limite en b. Quand dit-on que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente ?

2) Quelle est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

3) L' intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est-elle convergente ? Si oui, trouver sa valeur.

EXERCICE III (ALGEBRE)

On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où I est la matrice unité d'ordre 3.

On pose M = B - 2I et P = I - M.

1-

a- Déterminer les matrices M^2 et M^3.

b- Effectuer le produit matriciel P. $(I+M+M^2)$

c- En déduire de ce qui précède que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

N.B (On ne calculera pas de déterminant, ni de comatrice)

2- On considère une base B'= (u_1 ; u_2 ; u_3) de $\mathbb{R}^3$ et un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\begin{cases} f(u_1) = u_1 - u_3 \\ f(u_2) = u_1 + u_2 - u_3 \\ f(u_1 + u_2 + u_3) = 0 \end{cases}$

a- A' désigne la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ relativement à la base B'. Déterminer la matrice A'.

b- On considère la famille B= (e_1 ; e_2 ; e_3) des trois vecteurs e_1 , e_2 et e_3 telle que : $\begin{cases} e_1 = 2u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\ e_2 = u_1 + 2u_2 + 2u_3 \\ e_3 = -u_1 - u_2 - u_3 \end{cases}$

Démontrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

c- En déduire la matrice de passage de la base B' à la base B.

d- Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B'.

e- Déterminer la matrice A de f dans la base B.

3-

a- Donner l'expression analytique de l'endomorphisme f.

b- Déterminer le noyau Ker(f) de l'endomorphisme f. En donner une base.

c- Montrer que les vecteurs v_1=f(e_2) et v_2= 6e_1 – 4e_2 + 12e_3 constituent une base de Im(f).