

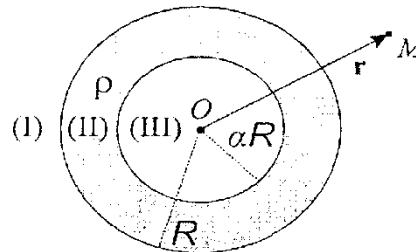


Consignes pour les candidats

Voir la grille de réponses.

— ÉLECTROSTATIQUE DANS UNE SPHÈRE À CAVITÉ —

Q01. Une sphère creuse (S), de centre O , de rayon extérieur R et, de rayon intérieur αR , ($\alpha < 1$), est électriquement chargée en volume, avec une charge volumique uniforme ρ (cf. figure ci-après). On repère un point M de l'espace par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ où $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et. $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/r$. ϵ_0 désigne la permittivité du vide.



Calculer le champ électrostatique $E_I(r)$ produit par S dans la région (I) définie par $r > R$:

- A) $\vec{E}_I = (1-\alpha) \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ B) $\vec{E}_I = \alpha^3 \frac{\rho R^3}{r^2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ C) $\vec{E}_I = (1-\alpha) \frac{\rho R^3}{6\pi r^2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ D) ?

Q02. Exprimer le champ électrostatique $E_{II}(r)$ produit par S dans la région (II) définie par $\alpha R < r < R$:

- A) $\vec{E}_{II} = -\frac{\rho \alpha^3 R^2}{3r \epsilon_0} \vec{e}_r$ B) $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$ C) $\vec{E} = \vec{0}$ D) ?

Q03. En déduire le potentiel électrostatique $V_I(r)$ de la région (I) en choisissant son origine à l'infini :

- A) $V_I(r) = \alpha^3 \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$ B) $V_I(r) = (\alpha^3 - 1) \frac{\rho R^3}{3r \epsilon_0}$ C) $V_I(r) = (1-\alpha) \frac{\rho R^3}{6\pi \epsilon_0 r}$ D) ?

Q04. Quelle est l'expression du potentiel électrostatique $V_{III}(r)$ de la région (III) définie par $r < \alpha R$:

- A) $V_{III}(r) = \alpha^2 \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$ B) $V_{III}(r) = (1-\alpha^3) \frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$ C) $V_{III}(r) = (1-\alpha^3) \frac{\rho R}{4\pi \epsilon_0}$ D) ?

Q05. Lorsque $1-\alpha \ll 1$, (S) devient une coquille sphérique de faible épaisseur, que l'on assimile à une sphère de rayon R , uniformément chargée surface, de charge surfacique σ . Exprimer σ :

- A) $\sigma = \frac{\rho R(1-\alpha)}{3}$ B) $\sigma = 3\rho R(1-\alpha)$ C) $\sigma = \rho R\alpha$ D) ?

Q06. Dans l'hypothèse de la question précédente $1-\alpha \ll 1$, déterminer la différence de potentiel $U = V_I(R) - V_{III}(0)$

- A) $U = \frac{\sigma}{\epsilon_0 R}$ B) $U = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ C) $U = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R}$ D) ?

— MAGNÉTOSTATIQUE DES SUPRACONDUCTEURS —

Ce problème examine quelques propriétés des supraconducteurs du seul point de vue de la magnétostatique. Au passage, il met en évidence celles de ces propriétés qui correspondent à celles des conducteurs parfaits. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

I – Préliminaires

I.1 Superposition d'un champ uniforme et de celui d'un dipôle

On considère la superposition d'un champ uniforme $\vec{B}_a = B_a \vec{e}_z$, et du champ \vec{B}_M créé par un dipôle magnétique de moment \vec{M} placé à l'origine des coordonnées qui s'écrit, au point P repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ .

$$\vec{B}_M(P) = \vec{B}_M(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{(3\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right\} \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

\vec{M} et \vec{B}_a sont reliés par :

$$\vec{M} = - \left(\frac{2\pi R^3}{\mu_0} \right) B_a \vec{e}_z$$

Où R est une longueur donnée

Q07. Quelle est l'expression du champ magnétique total \vec{B}_R résultant de la superposition du champ uniforme \vec{B}_a et du champ d'un dipôle \vec{B}_M ?

A) $\vec{B}_R = B_a \vec{e}_r + \vec{B}_M$ B) $\vec{B}_R = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{(3\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right\}$ C) $\vec{B}_R = \vec{B}_a + \vec{B}_M$ D) ?

Q08. Calculer le produit scalaire $\vec{B}_R \cdot r \vec{e}_r$ en un point quelconque.

A) $\vec{B}_R \cdot r \vec{e}_r = r B_a \left(1 - \frac{R^3}{r^2} \right) \sin \theta$ B) $\vec{B}_R \cdot r \vec{e}_r = B_a \left(1 - \frac{R}{r^3} \right) \cos \theta$ C) $\vec{B}_R \cdot r \vec{e}_r = r \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta$ D) ?

Q09. Pour $r = R$, pourquoi le champ \vec{B}_R est-il tangent à la sphère ?

A) Parce qu'il est parallèle à \vec{e}_r B) Parce qu'il est perpendiculaire à \vec{e}_θ
C) Parce qu'il est perpendiculaire à \vec{e}_r D) ?

Q10. Quelle est l'expression vectorielle du champ \vec{B}_R au niveau de la sphère ?

A) $\vec{B}_R = B_a (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$ B) $\vec{B}_R = B_a (\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ C) $\vec{B}_R = \frac{3}{2} B_a (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z)$ D) ?

Q11. Quelle est l'intensité (le module) du champ \vec{B}_R à la surface de la sphère ?

A) $\|\vec{B}_R\| = B_a \cos \theta$ B) $\|\vec{B}_R\| = B_a \sin \theta$ C) $\|\vec{B}_R\| = \frac{3}{2} B_a \cos \theta$ D) ?

Q12. Pour quelle valeur de θ l'intensité du champ est-elle maximale ?

A) $\theta = 0$ B) $\theta = \pi/4$ C) $\theta = \pi$ D) ?

Q13. Quelle est l'allure des lignes de champ \vec{B}_R à l'extérieur de la sphère supraconductrice ?

A) Courbes circulaires autour de la sphère. B) Lignes de champ radiales.
C) Lignes parallèles déformées au voisinage de la sphère D) ?

I.2 Moment magnétique d'une distribution sphérique de courant

On considère la nappe surfacique de courant :

$$\begin{cases} \vec{j}_s(r, \theta, \varphi) = j_0 \sin \theta \vec{e}_\varphi & \text{si } r = R \\ \vec{j}_s(r, \theta, \varphi) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q14. Déterminer à priori la direction du champ $\vec{B}(0)$ créé par la distribution au centre de la sphère.

- A) Direction \vec{e}_r B) Direction \vec{e}_θ C) Direction \vec{e}_φ D) ?

Q15. Quelle est l'expression du champ magnétique au centre de la sphère $\vec{B}(0)$?

- A) $\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \vec{e}_r$ B) $\vec{B}(0) = \frac{4}{3} \mu_0 j_0 \vec{e}_z$ C) $\vec{B}(0) = \frac{3}{2} \mu_0 j_0 \vec{e}_\theta$ D) ?

Donnée : $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$.

Q16. Quel est le moment magnétique $\overrightarrow{d\mathcal{M}}$ d'une tranche de la distribution de courant comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$?

- A) $\overrightarrow{d\mathcal{M}} = 2\pi R^2 j_0 \sin^2 \theta d\theta \vec{e}_z$ B) $\overrightarrow{d\mathcal{M}} = j_0 R^3 \cos^2 \theta d\theta \vec{e}_r$ C) $\overrightarrow{d\mathcal{M}} = j_0 R^3 \sin^2 \theta d\theta \vec{e}_z$ D) ?

Q17. Calculer le moment magnétique total $\overrightarrow{\mathcal{M}}_s$ de la nappe de courant $\vec{j}_s(r, \theta, \varphi)$.

- A) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_s = \frac{4}{3} \pi R^2 j_0 \vec{e}_z$ B) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_s = \frac{4}{3} \pi R^3 j_0 \vec{e}_r$ C) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_s = \frac{2}{3} \pi R^2 j_0 \vec{e}_z$ D) ?

II — Sphère supraconductrice dans un champ magnétique

L'état supraconducteur parfait d'un matériau, obtenu pour une température inférieure à une température critique T_c , et pour une intensité du champ magnétique appliqué inférieure à une valeur critique B_c , est caractérisé par $\vec{B} = \vec{0}$ en tout point intérieur.

Une sphère, remplie d'un matériau à l'état de supraconducteur parfait, est placée dans un champ magnétique $\vec{B}_a = B_a \vec{e}_z$, initialement uniforme. L'intersection de cette sphère de centre O et de rayon R avec le plan $z = 0$ est appelée cercle équatorial.

II.1 Propriétés du courant et du champ. Conséquences.

Q18. Une conséquence de l'équation de Maxwell-Ampère dans un supraconducteur en régime stationnaire est que :

- A) Le courant volumique est non nul B) Le champ électrique est nécessairement nul
C) Le champ magnétique varie dans le temps D) ?

Q19. Rappeler la relation vectorielle de continuité de la composante normale du champ \vec{B} à la traversée d'une surface séparant deux milieux 1 et 2 (on notera \vec{n}_{12} la normale à la surface orientée de 1 vers 2).

- A) $\vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} = \mu_0 \vec{j}_s$ B) $\vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} = \mu_0 \vec{j}_v$ C) $\vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} = \sigma \vec{n}_{12}$ D) ?

Q20. Quelle est la conséquence sur le champ extérieur à la sphère ?

- A) Le champ est radial au voisinage de la sphère B) Le champ est nul en tout point extérieur
C) Le champ est perpendiculaire à la surface D) ?

Q32. Quel est le courant surfacique critique J_C correspondant dans le niobure d'étain à 18 K ?

- A) $1,57 \cdot 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ B) $1,88 \cdot 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ C) $6,25 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ D) ?

Q33. Quel est le champ magnétique $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_z$ que l'on peut appliquer à une sphère supraconductrice sans provoquer la rupture de l'état supraconducteur ?

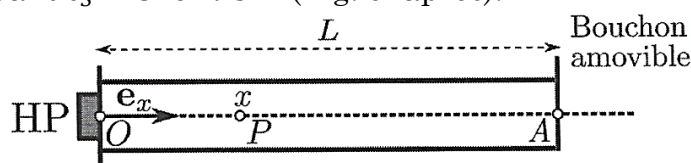
- A) $B_1 = B_C$ B) $B_1 = 1,5 B_C$ C) $B_1 = 0,5 B_C$ D) ?

Q34. Application numérique

- A) $B_1 = 12,5 \text{ T}$ B) $B_1 = 18,75 \text{ T}$ C) $B_1 = 6,25 \text{ T}$ D) ?

— ONDES STATIONNAIRES —

L'air contenu dans un tuyau cylindrique, de longueur $L = OA = 2 \text{ m}$, est excité par un haut-parleur (HP) émettant des ondes acoustiques sinusoïdales de fréquence f . Un bouchon situé en A ferme l'extrémité droite du tuyau. On note $\psi_f(x, t)$ la fonction d'onde de l'onde acoustique dans le tuyau, x étant l'abscisse d'un point P situé à l'intérieur du tube sur l'axe (O, \vec{e}_x) , et t , le temps. La vitesse du son dans le tuyau vaut $c_S = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Fig. ci-après).



Aucune connaissance spécifique sur les ondes acoustiques n'est nécessaire pour aborder cette partie.

On observe que les ondes dans le tuyau se superposent pour former une onde stationnaire d'amplitude ψ_m . En présence du bouchon, elle vérifie les conditions aux limites, ainsi que la condition initiale suivante :

$$\psi_f(0, t) = 0, \quad \psi_f(L, t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi_f(x, 0) = 0$$

Q35. En introduisant une constante spatiale et temporelle k_f , indiquer l'expression correcte de cette onde stationnaire :

- A) $\psi_f(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft - k_f x)$ B) $\psi_f(x, t) = \psi_m \cos(2\pi ft) \sin(k_f x)$
 C) $\psi_f(x, t) = \psi_m \cos(2\pi ft) \cos(k_f x)$ D) ?

Q36. Calculer numériquement la fréquence $f_{1,f}$ de l'harmonique fondamentale.

- A) $f_{1,f} \approx 6 \text{ mHz}$ B) $f_{1,f} \approx 12 \text{ mHz}$ C) $f_{1,f} \approx 42,5 \text{ Hz}$ D) ?

Q37. En introduisant l'entier $n > 0$, déterminer l'expression des longueurs d'onde λ_n des ondes stationnaires qui peuvent exister dans le tuyau :

- A) $\lambda_n = L/n$ B) $\lambda_n = nL$ C) $\lambda_n = 2nL$ D) ?

Q38. Le bouchon est désormais retiré. On observe alors une nouvelle onde stationnaire dans le tuyau, notée $\psi_0(x, t)$ de même amplitude ψ_m . L'ouverture du tuyau modifie les conditions aux limites, la condition initiale restant la même :

$$\psi_0(0, t) = 0, \quad \psi_0(L, t) = \psi_m \quad \text{et} \quad \psi_0(x, 0) = 0$$

En introduisant une nouvelle constante spatiale et temporelle k_0 , déterminer l'expression de $\psi_0(x, t)$

- A) $\psi_0(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft + k_0 x)$ B) $\psi_0(x, t) = \psi_m \cos(2\pi ft) \sin(k_0 x)$
 C) $\psi_0(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft) \cos(k_0 x)$ D) ?

Q39. Calculer numériquement la fréquence $f_{1,0}$ de l'harmonique fondamentale.

- A) $f_{1,0} \approx 6 \text{ mHz}$ B) $f_{1,0} \approx 12 \text{ mHz}$ C) $f_{1,0} \approx 85 \text{ Hz}$ D) ?

Q40. En introduisant l'entier $m > 0$, déterminer l'expression des longueurs d'ondes λ_m des ondes stationnaires qui peuvent exister dans le tuyau :

- A) $\lambda_m = \frac{L}{2m}$ B) $\lambda_m = \frac{L}{m}$ C) $\lambda_m = \frac{L}{m+1/2}$ D) ?