



Concours GCN/GIN session 2025

Option MATHÉMATIQUES

Option SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Composition : **Sciences industrielles 1**
(Mécanique, Thermodynamique, Electricité, Optique)

Durée : **3 Heures**

Consignes pour les candidats

Ce sujet comporte Trois parties indépendantes. Aucun document n'est autorisé.

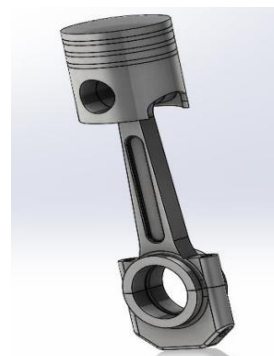
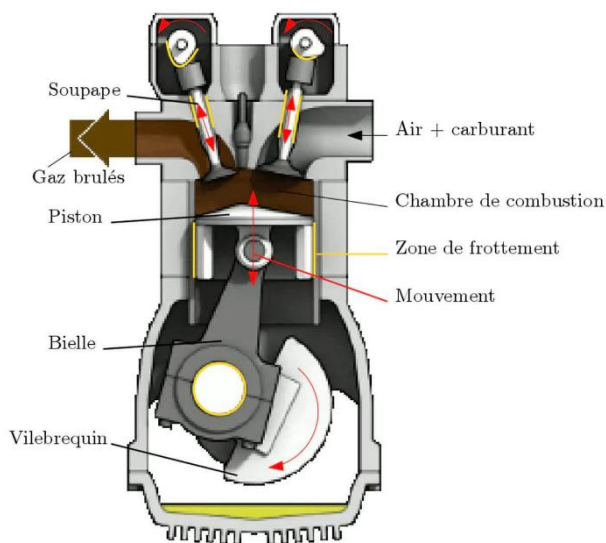
Moteur à combustion interne/groupe électrogène



Un moteur thermique à combustion interne fonctionne en brûlant un mélange de carburant et d'air à l'intérieur d'un cylindre pour produire de l'énergie mécanique. Les étapes principales de son fonctionnement sont :

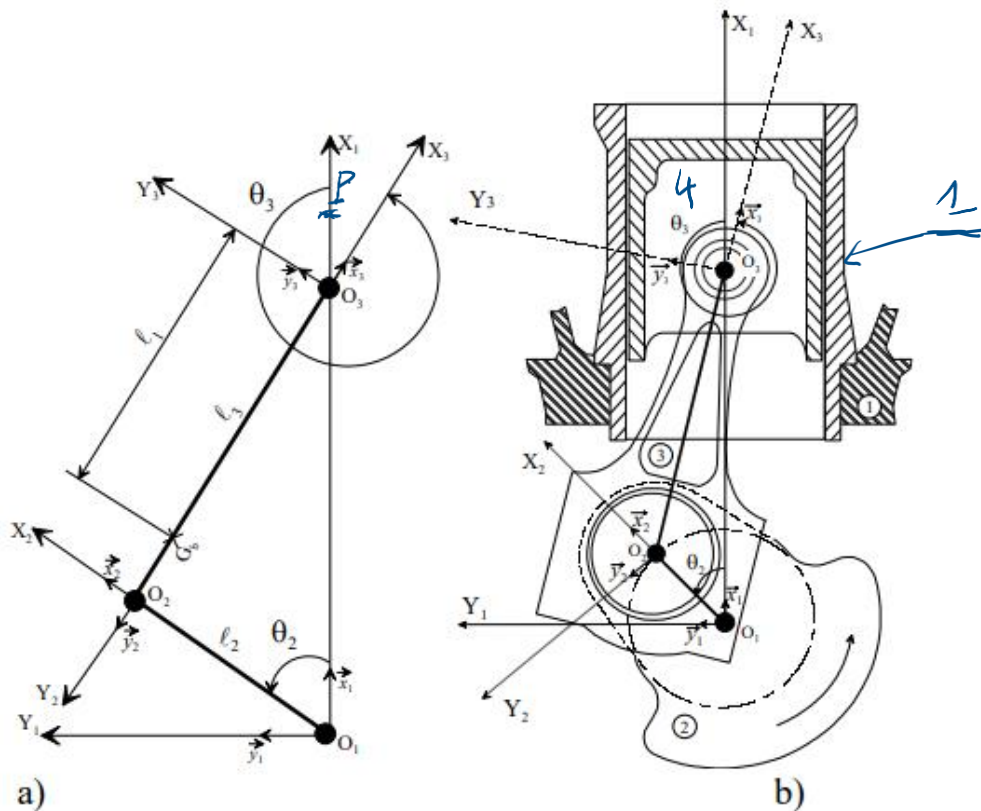
1. Admission : Le mélange air-carburant est aspiré dans le cylindre.
2. Compression : Le piston comprime le mélange, augmentant ainsi sa température et sa pression.
3. Combustion : Une étincelle (dans les moteurs à essence) ou une compression supplémentaire (dans les moteurs diesel) enflamme le mélange, provoquant une explosion qui pousse le piston vers le bas.
4. Échappement : Les gaz brûlés sont expulsés du cylindre pour préparer le cycle suivant.

Ce cycle se répète plusieurs fois par seconde, permettant au moteur de produire une puissance continue.



Le moteur thermique est un convertisseur thermomécanique. Dans certaines utilisations, l'énergie mécanique produite est transformée en énergie électrique via un convertisseur mécano-électrique. Dans cette configuration on parle de groupe électrogène. Le convertisseur est soit appelé alternateur ou générateur.

La figure ci-dessous est une représentation cinématique des mouvements combinés de la bielle, du piston et du vilebrequin.



Partie 1 : Etude cinématique

On considère pour cette étude les bases : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$; $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$; et $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$\vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_3$; $(\vec{x}_1; \vec{x}_2) = \theta_2$ et $(\vec{x}_1; \vec{x}_3) = \theta_3$; $\vec{O}_3\vec{P} = \lambda \cdot \vec{x}_1$; $\vec{O}_1\vec{O}_2 = l_2\vec{x}_2$; $\vec{O}_2\vec{O}_3 = l_3\vec{x}_3$

Les liaisons entre les solides 1-2-3-4 sont :

- L_{12} : pivot d'axe (z_1) ;
- L_{23} : Pivot d'axe (z_2) ;
- L_{34} : pivot d'axe (z_3) ;
- L_{41} : glissière d'axe (x_1) .

Question 1 : Réaliser le graphe des liaisons du moteur, le solide S_1 étant relié à la masse.

Question 2 : Déterminer l'expression de $\vec{O}_1\vec{P}$ et les expressions des vecteurs vitesses angulaires $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{3/1}$.

Question 3 : Déterminer les torseurs cinématiques de chaque liaison.

Question 4 : Réaliser la fermeture cinématique du moteur.

Question 5 : Déterminer le degré de mobilité du mécanisme.

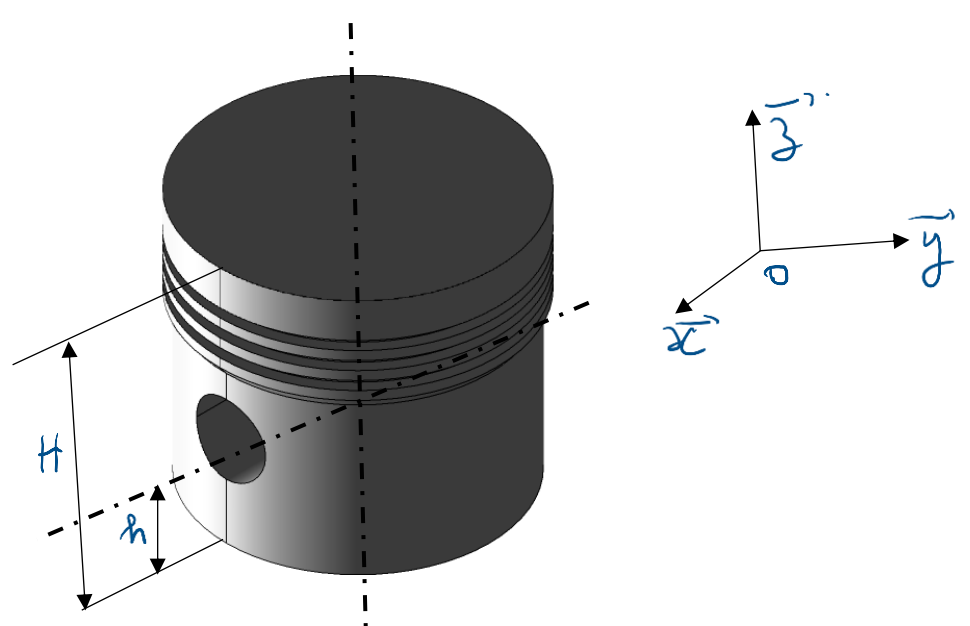
Question 6 : Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(P, s_4 / s_1)$ par la dérivée de $\vec{O}_1\vec{P}$.

Question 7 : Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(P, s_4 / s_1)$ par la méthode de composition de mouvements.

Partie 2 : Etude dynamique

On désire étudier l'énergie cinétique du mécanisme en déterminant à partir du mouvement du piston.

Pour simplifier les calculs, on modélise le piston comme étant un cylindre plein traversé par un cylindre creux transversal. La hauteur du cylindre est $H = 100\text{mm}$, diamètre $D = 60\text{mm}$, et le diamètre du cylindre transversal $d = 40\text{mm}$. Voir schéma de modélisation.



On considère M la masse totale du piston composée de la masse m_1 du cylindre (S_1) sans le creux et de la masse m_2 du cylindre transversal (S_2) considéré comme plein. On obtiendra la ma M par soustraction.

La masse volumique de la matière est $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$

Question 8 : Calculer les masses m_1 et m_2 . En déduire la masse totale $M = m_1 - m_2$.

Question 9 : Calculer les coordonnées des centres d'inertie G_1 et G_2 de chaque cylindre.

Question 10 : En déduire le centre d'inertie G du piston.

Question 11 : Calculer la matrice d'inertie de chaque solide $I_1(G_1, S_1)$ et $I_2(G_2, S_2)$.

Question 12 : En déduire le matrice d'inertie du piston $I(G, S)$. On pourra utiliser le théorème de Huygens.

Question 13 : Déduire la matrice d'inertie en $I(O, S)$.

Question 14 : En considérant le mouvement de translation de ce piston exprimé à la question 6, calculer l'énergie cinétique du piston.

Question 15 : déterminer le torseur cinétique du piston en O_3 .

PARTIE 3 : ETUDE DE L'ASSERVISSEMENT DU GENERATEUR ELECTRIQUE

Le modèle retenu pour décrire le comportement du générateur qui est entraîné le moteur thermique est celui d'un générateur à courant continu à enroulement séparé. Les équations électromagnétiques de ce type de générateur sont données ci-dessous :

- Équation de commande : $u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ (1)

- Relation de couple : $C_m(t) = K_t \cdot i(t)$ (2)

- Relation de la f.c.é.m. moteur : $e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$ (3)

- Équation mécanique équivalente : $J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$ (4)

- $u(t)$: tension aux bornes du générateur

- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur
(rd/s)

- $e(t)$ f.c.é.m. du générateur

- $\omega_r(t)$: vitesse à la sortie du réducteur
(rd/s)

- $C_m(t)$: couple moteur

- $i(t)$: intensité du générateur

$C_r(t)$: couple résistant sur l'arbre moteur

- R : résistance de l'induit

- L : inductance de l'induit

- K_e : constante de la f.c.é.m.

- K_t : constante de couple

- J_{eq} : moment d'inertie équivalent

Question 16 : En supposant les conditions initiales nulles, écrire les 4 équations précédentes dans le plan de Laplace.

Question 17 : Donner la relation de transfert sous la forme :

$$\Omega_m(p) = A(p) \cdot U(p) - B(p) \cdot C_r(p)$$

Question 18 : Mettre A(p) et B(p) sous leurs formes canoniques, et donner leurs ordres, leurs classes et leurs caractéristiques (gains statiques K_1 et K_2 ; pulsation propre ω_n et facteur d'amortissement z).

Question 19 : Montrer, en faisant une hypothèse que l'on indiquera clairement, qu'il est possible de mettre A(p) sous la forme :

$$A(p) = \frac{K_1}{1+T \cdot p} \quad ; T : \text{constante de temps mécanique et } K_1 \text{ le gain statique}$$

$$\text{Données : } R = 1,5 \, \Omega ; L = 0,12 \, \text{mH} ; K_e = K_t = 0,15 \, (\text{SI}) ; J_{eq} = 6 \cdot 10^{-4} \, (\text{SI}).$$

Question 20 : Déterminer, K_1 ; ω_n et T et z .

Dans la suite de l'épreuve on prendra A(p) sous sa forme de la question 17.

Question 21 : On considérera $C_r(t) = 0$, donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $G(p)$ à retour unitaire de l'asservissement sous forme littérale et numérique (qu'on mettra sous forme canonique).

Question 22 : Sur le document-réponse tracer les diagrammes de Bode (gain et phase) de $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$; on y précisera clairement les différentes caractéristiques et on prendra pour échelle :

$$1\text{cm} \rightarrow 10 \, \text{dB} \text{ et } 1 \, \text{cm} \rightarrow 45^\circ. \quad (\text{Voir DR2})$$

Question 23 : Donner les marges de gain ΔG et de phase $\Delta \phi$ de cet asservissement.

Question 24 : Déterminer la sortie $\omega_m(t)$ pour une entrée échelon unité avec $U(p) = \frac{1}{p}$; donner son allure.

Diagramme de Bode du procédé

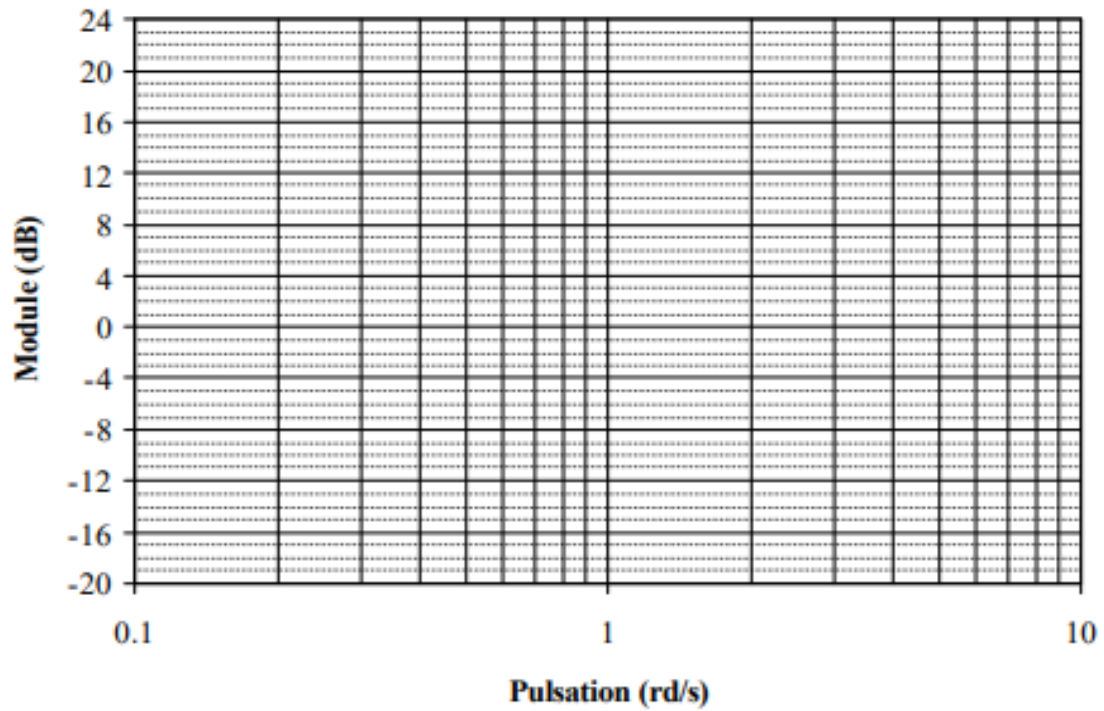


Diagramme de Bode du procédé

